

MATHEMATISCH CENTRUM

Afd. Toegepaste Wiskunde

Rapport TW no. 16

Auteur: J. Kemperman

Titel: Enige stromingsproblemen.

Datum: Juli 1951

Enige stromingsproblemen.

Het eerste probleem is analoog aan het probleem, dat werd gesteld in Rapport TW no. 15^{*}); dit rapport zal worden geciteerd als I (b.v. formule I, (4); blz. I, 14).

Zij gegeven een anisotroop zandpakket met horizontale doorlaatbaarheid $k_1 = k$, en verticale doorlaatbaarheid k_2 . Dit pakket wordt aan de onderzijde begrensd door een horizontale kleilaag met weerstand c . Onder de kleilaag heeft de zoetwater-potentiaal (= stijghoogte boven kleilaag) de constante waarde $a > 0$. Boven de kleilaag bevindt zich een oneindig lang horizontaal kanaal, dat geheel met water is gevuld. Alle dwarsdoorsneden van dit kanaal zijn congruent met een gegeven gelijkbenig trapezium ABCD.

Beschouwd wordt de resulterende stationnaire (twee-dimensionale) stroming tussen het phreatisch oppervlak (resp. kanaal) en de kleilaag (zie figuur op blz. I,1). We vragen naar de hoeveelheid water Q_0 , welke per dag en per strekkende meter uit het kanaal weglekt, en verder naar de vorm van het phreatisch oppervlak. In het bijzonder beschouwen we het geval, waarin de constanten van het systeem zijn gegeven door

$$(1) \quad \begin{cases} d = 16 ; \quad \overline{EF} = 1 ; \quad \overline{AF} = 4,5 ; \quad \overline{BE} = 2,5 ; \quad a = 10 \\ k = 12 ; \quad k_2 = 4/3 ; \quad c = 4000. \end{cases}$$

resp. door

$$(2) \quad \begin{cases} d = 16 ; \quad \overline{EF} = 1 ; \quad \overline{AF} = 4,5 ; \quad \overline{BE} = 2,5 ; \quad a = 10. \\ k = 12 ; \quad k_2 = 12 ; \quad c = 4000. \end{cases}$$

In rapport I vonden we, dat in geval I, (1) het phreatisch oppervlak nabij het kanaal slechts zeer langzaam daalt. Overgaande op geval (2) is d afgenomen, en zijn a en k ($k = k_1 = k_2$) toegenomen. Dus in geval (2) zal het phreatisch oppervlak nog langzamer dalen nabij het kanaal.

Zij (x,y) het rechthoekig coördinatenstelsel, waarvoor de x -as langs de bovenzijde van de kleilaag valt, en de y -as langs de hartlijn van het kanaal. Zij $y = f(x)$ de vergelijking van de phreatische kromme. Voor $x \geq 5$ met $\sqrt{x} \sim 20$ wordt de functie $f(x)$ in goede benadering

^{*}) J. Kemperman en A. Reiner, Het stromingspatroon boven een kleilaag bij aanwezigheid van een kanaal, Mathematisch Centrum, Rapport TW no. 15.

weergegeven door de formules I, (8) en I, (9), waarin x_0 een nog onbekende constante voorstelt. Immers, de formules van § I, 3 berusten op de veronderstelling, dat de stroomsnelheden praktisch horizontaal zijn, zodat alleen de horizontale doorlaatbaarheid $k = k_1$ een rol speelt. Verder, wanneer (x, f) een punt is van de phreatische kromme op voldoende afstand van het kanaal (b.v. $x \geq 20$), dan wordt de hoeveelheid water $Q(x)$, welke per dag en per strekkende meter de doorsnede met abscis x passeert, in goede benadering door I, (10) en I, (11) gegeven.

Voor de keuze $a = 10$; $k = 12$ en $c = 4000$ zijn de functies $p(f)$ en $q(f)$ in onderstaande tabel weergegeven.

	$p(f)$	$g(f)$
$f = 10,1$	+ 2349	0,0174
11	+ 1205	0,1789
12	+ 202	0,3688
13	- 14	0,5692
14	- 379	0,7797
15	- 575	1,0000
15,6	- 681	1,1367
16	- 742	1,2296

Daar in geval (2) het phreatisch oppervlak nabij het kanaal slechts langzaam daalt, hebben we voor de hoogte $f_0 = f(\xi)$ van dit oppervlak (met $\xi \sim 20$), dat $f_0 \sim 16$. Dit impliceert

$$(3) \quad Q_0 = 2 q(16) = 2,46 \text{ m}^3/\text{dag},$$

terwijl de phreatische kromme

$$x - \xi = p(f) - p(f_0)$$

in redelijke benadering wordt gegeven door

$$(4) \quad x = p(f) - p(16) + \overline{AF}.$$

Overgaande van (2) op (1) wordt de verticale doorlaatbaarheid k_2 aanzienlijk kleiner, terwijl de overige constanten onveranderd blijven. Het is dus niet uitgesloten, dat de uitstroming Q_0 belangrijk kleiner is, daar al het uit het kanaal wegstromende water vroeg of laat bij de kleilaag arriveert en dus de in verticale richting heersende weerstand moet overwinnen. En wel zal de invloed van de kleine verticale doorlaatbaarheid het grootst zijn op het stromingspatroon nabij het kanaal, waar de verticale component van de stroom-

snelheid nog groot is. Deze invloed zal tot uitdrukking komen in een snellere daling van het phreatisch oppervlak nabij het kanaal, daar immers Q_0 kleiner is geworden (zie formule I, (10), geldig voor $x \geq 20$). We zullen nu onderzoeken in hoeverre deze snellere daling van belang is (het zal blijken, dat de kleinere waarde van k_2 slechts een geringe invloed heeft op de uitstroming Q_0).

We zullen dus nu het geval $k \neq k_2$ beschouwen (en in het bijzonder het geval (1)). Wanneer $\varphi(x,y)$ de potentiaalfunctie is, dan worden de snelheidscomponenten bepaald door

$$(5) \quad u = -k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad ; \quad v = -k_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} .$$

De stroomlijnen van het resulterende stromingsbeeld (aan te duiden met Λ) zijn de oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$u \, dy = v \, dx$$

ofwel

$$(6) \quad \frac{dx}{k \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{k_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}} .$$

Op het stromingsbeeld Λ passen we nu de volgende transformatie toe

$$(7) \quad x = \gamma X \quad ; \quad y = Y ,$$

waarin

$$(8) \quad k = \gamma^2 k_2 \quad (\gamma > 0) .$$

Zij verder

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi(x,y) = \Phi(X,Y) \\ u(x,y) = \gamma U(X,Y) \\ v(x,y) = V(X,Y) . \end{cases}$$

De stroomlijnen van het patroon Λ gaan hierdoor over in de oplossingen van

$$\frac{dX}{k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial X}} = \frac{dY}{k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial Y}}$$

d.w.z. stroomlijnen van het patroon Ω , dat in een isotroop zandpakket (met doorlaatbaarheid k_2) correspondeert met de potentiaalfunctie $\Phi(X,Y)$. De componenten van de stroomsnelheid voor het patroon Ω zijn juist U en V . Immers

$$-k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial X} = -k_2 \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{k}{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{u}{\gamma} = U$$

en

$$-k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -k_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v = V.$$

De functie $\varphi(x,y)$ voldoet aan de volgende voorwaarden.

I $k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$

II Op het gegeven kanaalprofiel heeft de functie $\varphi(x,y)$ de constante waarde $\varphi = d$.

III Op de stroomlijn door het eindpunt A van het kanaalprofiel (behorende bij het patroon Λ) geldt $\varphi(x,y) = y$.

IV Langs de x-as geldt $k_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi - a}{c}.$

V Het gedeelte OE van de y-as is stroomlijn (d.w.z. $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$).

Hieruit volgt onmiddellijk, dat de functie $\Phi(X,Y)$ (behorende bij Ω) de volgende voorwaarden vervult.

A. $\Delta \Phi = 0.$

B. Op het volgens (7) getransformeerde kanaalprofiel geldt $\Phi(X,Y) = d$.

C. Op de stroomlijn door het eindpunt van het getransformeerde kanaalprofiel (behorende bij het patroon Ω) geldt $\Phi(X,Y) = Y$.

D. Langs de X-as geldt $k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{\Phi - a}{c}.$

E. Het gedeelte $0 \leq Y \leq OE$ van de Y-as is stroomlijn (d.w.z. $\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0$).

De functie $\Phi(X,Y)$ kan dus (in goede benadering) worden berekend met behulp van de in rapport I aangegeven methode, welke geldt voor een isotrope stroming. Voor grote waarden X ($X \geq \zeta$ met $\zeta \sim 10$) geldt in goede benadering

$$\Phi(X,Y) = F(X),$$

wanneer $Y = F(X)$ de vergelijking is van de phreatische kromme in het patroon Ω . Hieruit volgt (zie § I,3)

$$(10) \quad X - X_0 = \frac{1}{\gamma} p(F),$$

voor de vergelijking van de phreatische kromme. Hierin is X_0 een nog onbekende constante en is

$$\frac{1}{\gamma} p(f) = \sqrt{a k_2 c} \left[\ln(2a + f + \sqrt{6af + 3a^2}) - \ln(f-a) - \sqrt{3 + \frac{6f}{a}} \right].$$

Verder hebben we voor $X \geq \zeta$, dat

$$\frac{1}{\gamma} q(F) = \sqrt{\frac{k_2}{3c}} (F-a) \sqrt{2F+a}$$

gelijk is aan de hoeveelheid water welke (voor het patroon Ω) per dag door de doorsnede stroomt, waar de phreatische kromme een hoogte F heeft.

De functies $p(f)$ en $q(f)$ zijn voor $k = k_2$ $y^2 = 12$, $a = 10$ en $c = 4000$ in bovenstaande tabel weergegeven.

Voor de bepaling van het patroon Ω nabij het kanaal ($X \leq \zeta$ met $\zeta \sim 10$) gaat men als volgt te werk.

A. Kies een klein positief getal λ en stel

$$\alpha = \frac{\pi}{2(d+\lambda)}$$

B. Bereken de grootheden

$$p = \sinh \frac{\alpha}{y} (\overline{AF}) \sin \alpha d$$

$$q = \cosh \frac{\alpha}{y} (\overline{AF}) \cos \alpha d$$

$$r = \sinh \frac{\alpha}{y} (\overline{BE}) \sin \alpha (\overline{OE})$$

$$s = \cosh \frac{\alpha}{y} (\overline{BE}) \cos \alpha (\overline{OE}).$$

C. Bepaal ξ_0 uit

$$\tanh \xi_0 = \sqrt{\frac{s^2 - q^2}{p^2 - r^2}}.$$

D. Bepaal c uit

$$c = \sqrt{(p^2 s^2 - q^2 r^2) \left(\frac{1}{s^2 - q^2} - \frac{1}{p^2 - r^2} \right)}.$$

E. Bepaal η_0 ($0 < \eta_0 < \frac{\pi}{2}$) uit

$$\sin \eta_0 = \frac{q}{c \sinh \xi_0}.$$

F. Bepaal F ($0 < F < 16$) uit

$$\sin \alpha F = \cos \eta_0 \sqrt{\frac{\cosh^2 \alpha \zeta + c^2 \sin^2 \eta_0}{\cosh^2 \alpha \zeta - \sin^2 \eta_0}}.$$

G. Bepaal ξ_1 uit

$$\sinh \xi_1 = \frac{\cosh \alpha \zeta \cos \alpha F}{c \sin \eta_0}.$$

H. Bereken tenslotte

$$\frac{1}{\gamma} q(F) = \sqrt{\frac{k_2}{3c}} (F-10) \sqrt{2F+10}$$

en

$$\frac{1}{\gamma} Q(F) = k_2 \frac{(\frac{\pi}{2} - \eta_0)(d-F)}{\xi_1 - \xi_0}.$$

Door systematisch proberen bepaalt men nu een waarde $\lambda > 0$, waarvoor $q(F)$ en $Q(F)$ gelijk zijn. Dan geeft

$$\frac{2}{\gamma} q(F) = \frac{2}{\gamma} Q(F)$$

voor het geval Ω de uitstroming uit het getransformeerde kanaal, en is

$$Q_0 = 2 q(F) = 2 Q(F)$$

de uitstroming uit het oorspronkelijke kanaal.

Met behulp van de formule uit rapport I bepaalt men nu gemakkelijk het patroon Ω . Voor het gezochte patroon Λ vindt men de phreatische kromme $y = f(x)$ als volgt.

Voor $x \geq \gamma \xi$ wordt de kromme $y = f(x)$ gegeven door

$$x - \gamma \xi = p(f) - p(F),$$

en voor $x \leq \gamma \xi$ door

$$\sin \alpha f = \cos \eta_0 \sqrt{\frac{\cosh^2 \frac{\alpha x}{\gamma} + c^2 \sin^2 \eta_0}{\cosh^2 \frac{\alpha x}{\gamma} - \sin^2 \eta_0}}.$$

De gekozen kanaalvorm heeft de vergelijking

$$\cos \alpha y = \sinh \xi_0 \sqrt{\frac{c^2 \cosh^2 \xi_0 - \sinh^2 \frac{\gamma x}{\gamma}}{\cosh^2 \xi_0 + \sinh^2 \frac{\alpha x}{\gamma}}}.$$

Hierin zijn F , c , η_0 en ξ_0 de waardes behorende bij de aansluitingswaarde λ , die gevonden worden tijdens het bovenaangegeven rekenschema.

We beschouwen nu het speciale geval (1). Hier is $\gamma = 3$. Aan de hand van bovenstaand schema werd gevonden (we kozen $\xi = 10$):

	$\frac{1}{\gamma} q(F)$	$\frac{1}{\gamma} Q(F)$	F
$\lambda = 0,1565$	0,3539	0,6772	15,272
0,131	0,3616	0,5859	15,374
0,07973	0,37896	0,37884	15,601
0,0795	0,3791	0,3777	15,602
0,073	0,3814	0,3499	15,632

Het blijkt dat $\lambda=0,07973$ goed voldoet. Dus volgt voor de lek uit het kanaal

$$Q_0 = 2 q(F) = 2,27 \text{ m}^3/\text{dag}$$

dit is dus slechts weinig minder dan de lek $Q_0 = 2,46$ in geval (2).

Enige punten op de gekozen benadering van het kanaalprofiel zijn

x = 0	y = 14,78
0,9	14,81
1,8	14,89
2,7	15,04
3,6	15,30
4,5	16,00

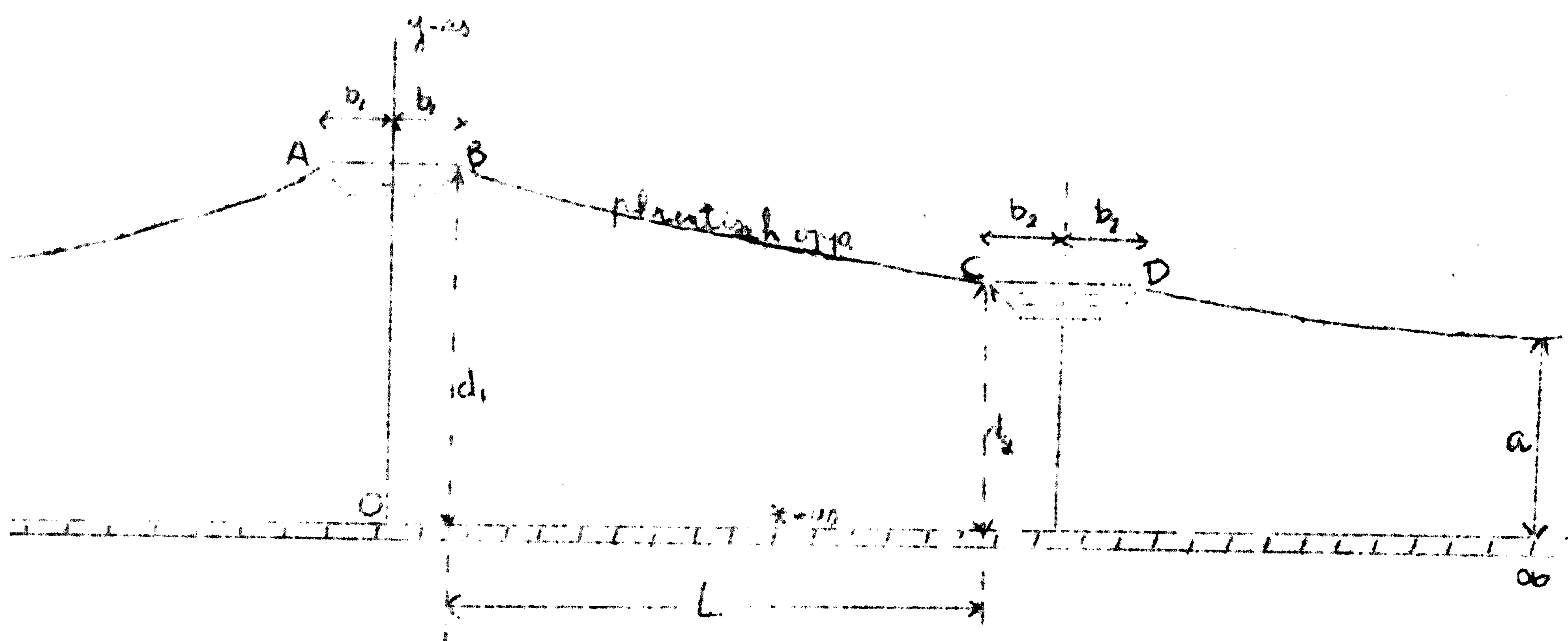
en het werkelijke (trapeziumvorming) profiel wordt er dus goed door benaderd.

Tenslotte geven we nog voor geval (1) en (2) enige punten aan van de phreatische kromme.

<u>Geval (1).</u>		<u>Geval (2).</u>	
x = 4,5	f = 16	x = 4,5	f = 16
6	15,966		
12	15,847		
18	15,746		
24	15,664		
30	15,601	x = 66	f = 15,6
136	15	172	15
332	14	368	14
697	13	733	13
913	12	949	12
1916	11	1952	11
3060	10,1	3096	10,1

(In geval (2) zijn de opgegeven waarden iets minder betrouwbaar, omdat deze zijn berekend in de veronderstelling, dat de één-dimensionale voorstelling van $I,3$ overaal bruikbaar is, zie formule (4)). De kleinere waarde van k_2 in geval (1) heeft dus inderdaad een snellere daling van de phreatische kromme tot gevolg.

Ons tweede probleem luidt als volgt. Een zandpakket met doorlatendheid k wordt aan de onderzijde begrensd door een horizontale homogene kleilaag met weerstand c . Het zandpakket wordt doorsneden door twee horizontale onderling evenwijdige kanalen. Elk dezer kanalen is oneindig lang, heeft onderling congruente dwarsdoorsneden, en is geheel met water gevuld. Beschouwd wordt de resulterende, stationnaire (twee-dimensionale) stroming.



Aangenomen wordt, dat onder de kleilaag de potentiaal een constante waarde $a > 0$ heeft. In het oneindige heeft het phreatisch oppervlak dus een hoogte a boven de kleilaag. Verder veronderstellen we, dat het phreatisch oppervlak overal slechts langzaam daalt; voor voldoende brede kanalen is dit doorgaans het geval, gezien onze ervaring in rapport I.

De betekenis der constanten b_1, d_1, L enz. en de ligging van de x -as en y -as blijkt voldoende uit bovenstaande figuur. Zij $\varphi(x, y)$ de heersende zoetwater-potentiaal. Dan geldt in goede benadering voor punten (x, y) , welke niet onder één der kanalen liggen:

$$\varphi(x, y) = f(x),$$

wanneer $y = f(x)$ de vergelijking is van het phreatisch oppervlak.

De continuïteitsvergelijking wordt nu

$$(11) \quad \frac{d}{dx} \left(k f \frac{df}{dx} \right) = \frac{f-a}{c}.$$

Stellen we

$$(12) \quad h(x) = \left(f \frac{df}{dx} \right)^2,$$

dan volgt uit (11)

$$\frac{f-a}{kc} = \frac{d}{dx} \sqrt{h} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \quad \frac{dh}{dx} = \frac{1}{2f} \quad \frac{dx}{df} \cdot \frac{dh}{dx} = \frac{1}{2f} \frac{dh}{df},$$

ofwel

$$\frac{dh}{df} = \frac{2}{kc} (f^2 - af).$$

Door integratie vindt men

$$(13) \quad h = \frac{2}{3kc} (f^3 - \frac{3}{2} af^2 + \frac{1}{2} \alpha a^3),$$

met α als integratieconstante. Mede wegens (12) volgt nu

$$\frac{dx}{df} = \pm \sqrt{\frac{3kc}{2}} \frac{f}{\sqrt{f^3 - \frac{3}{2} af^2 + \frac{1}{2} \alpha a^3}},$$

ofwel

$$(14) \quad x = \pm \sqrt{\frac{3kc}{2}} \int \frac{f df}{\sqrt{f^3 - \frac{3}{2} af^2 + \frac{1}{2} \alpha a^3}},$$

(het rechterlid bevat nog een vrije additieve integratieconstante).

Voor $\alpha = +\infty$ hebben we $f = a$ en $h = 0$ en dus wegens (13) is $\alpha = 1$.

Uit (14) volgt dus voor $x \geq L + b_1 + 2 b_2$

$$x - x_0 = p(f)$$

met

$$(15) \quad p(f) = \sqrt{akc} \left[\ln (2a+f + \sqrt{6 af + 3 a^2}) - \ln (f-a) - \sqrt{3 + \frac{6f}{a}} \right]$$

en met x_0 als vrije constante. Daar voor $x = L + b_1 + 2 b_2$ geldt $f = d_2$ vinden we tenslotte voor de phreatische kromme

$$(16) \quad x = p(f) - p(d_2) + L + b_1 + 2 b_2,$$

geldig voor $x \geq L + b_1 + 2b_2$. Analoog volgt voor $x \leq -b_1$

$$(17) \quad -x = p(f) + b_1 - p(d_1).$$

Tenslotte vinden we voor $b_1 \leq x \leq L - b_2$

$$(18) \quad x = b_1 + \sqrt{\frac{3kc}{2}} \int_{d_1}^f \frac{f df}{\sqrt{f^3 - \frac{3}{2} af^2 + \frac{1}{2} \alpha a^3}},$$

waarin α nog onbekend is; uit nadere onderzoekingen blijkt, dat in het algemeen $\alpha > 1$ geldt.

Nu hebben we voor $x = b_1 + L$, dat $f = d_2$. Blijkbaar kan α ($\alpha > 1$) worden bepaald uit de voorwaarde

$$(19) \quad L = \sqrt{\frac{3kc}{2}} \int_{d_1}^{d_2} \frac{f \, df}{\sqrt{f^3 - \frac{3}{2} af^2 + \frac{1}{2} \alpha a^3}} .$$

Het is mogelijk om de in het rechterlid voorkomende integraal terug te voeren op de getabelleerde elliptische integralen $E(\varphi, k)$ en $F(\varphi, k)$. De reductieformules worden evenwel vrij ingewikkeld, en daarom is het beter de integraal in (19) zonder meer numeriek te bepalen. Na enig proberen vindt men al spoedig de juiste waarde van α . Is α eenmaal bepaald, dan levert (18) de vergelijking van de phreatische kromme voor $b_1 \leq x \leq L - b_2$.

We zijn bijzonder geïnteresseerd in de hoeveelheid water $Q(x)$, welke per dag (en per strekkende meter) door de doorsnede met abscis x stroomt.

Wegens

$$Q(x) = \left| k f \frac{df}{dx} \right| ,$$

volgt uit (12) en (13)

$$(20) \quad Q(x) = \sqrt{\frac{2k}{3c}} \sqrt{f^3 - \frac{3}{2} af^2 + \frac{1}{2} \alpha a^3} .$$

Hierin is f de plaatselijke hoogte van de phreatische kromme. Verder is voor $x \leq -b_1$ en voor $x \geq L + b_1 + 2 b_2$ de grootheid $\alpha = 1$, in welk geval (20) kan worden gereduceerd tot

$$(21) \quad Q(x) = \sqrt{\frac{2k}{3c}} (f-a) \sqrt{f + \frac{1}{2} a} .$$

Voor $b_1 \leq x \leq L - b_2$ geldt in (20) de uit (19) gevonden waarde α .

Als numerieke toepassing beschouwen we het geval, waarin de voorkomende constanten als volgt zijn gegeven.

$$a = 10 ; \quad k = 12 ; \quad c = 4000$$

$$d_1 = 16 ; \quad d_2 = 11 ; \quad L = 400 ; \quad b_1 = b_2 = 4 .$$

Uit (17) vinden we voor het linkerdeel van de phreatische kromme

x = -4	f = 16
- 65	15,6
- 171	15
- 367	14
- 732	13
- 948	12
- 1951	11
- 3095	10,1

Uit het linkerkanaal stroomt naar links weg

$$q(16) = 1,230 \text{ m}^2/\text{dag},$$

Een tweetal punten van het meest rechtse deel van de phreatische kromme zijn

x = 412	f = 11
x = 1556	f = 10,1

Uit het rechterkanaal stroomt naar rechts weg

$$q(11) = 0,179 \text{ m}^2/\text{dag}.$$

De uit (19) gevonden waarde α bedraagt nu

$$\alpha = 4,529.$$

Enige punten van het middendeel van de phreatische kromme (gegeven door (18)) zijn:

x = 4	88.14	y = 16
89,14		15
172,81	82.67	14
253,93	81.12	13
331,34	77.91	12
404	72.66	11

Bij het punt B van het linkerkanaal stroomt naar rechts weg

$$2,245 \text{ m}^2/\text{dag}.$$

Bij het punt C van het rechterkanaal stroomt naar rechts weg

$$1,887 \text{ m}^2/\text{dag}.$$

De situatie is dus als volgt: het linkerkanaal verliest per dag en per strekkende meter $3,475 \text{ m}^3$ water en wel $1,230$ naar links en $2,245$ naar rechts; het rechter kanaal ontvangt $1,708 \text{ m}^2/\text{dag}$, terwijl $0,179 \text{ m}^2/\text{dag}$ onder het rechterkanaal door naar rechts wegstroomt. Tenslotte lekt $0,358 \text{ m}^2/\text{dag}$ weg door het deel van de kleilaag, dat tussen de kanalen is gelegen.